Advanced Macroeconomics
Klassische Wachstumsmodelle

Termin 5

Claudius Gräbner

University of Duisburg-Essen
Institute for Socio-Economics &

Johannes Kepler University Linz
Institute for Comprehensive Analysis of the Economy (ICAE)

www.claudius-graebner.com | www.uni-due.de | www.jku.at/icae

Outline

- Im Folgenden wollen wir die bisher behandelten Theorien zum Arbeitsmarkt, Haushaltssektor und der Produktion zu Wachstumsmodelle kombinieren
- Wir unterscheiden dabei vier Ansätze
  - Klassische Wachstumsmodelle
  - Neoklassische Wachstumsmodelle
  - Keynesianische Wachstumsmodelle
  - Evolutorische Wachstumsmodelle
- Diese werden in den nächsten Terminen anhand von Beispielen eingeführt
- Unterschiede zeigen sich insbesondere bei…
  - … Auswahl der Modellgleichungen und Theorie über zugrundeliegende Mechanismen
  - … Wahl endogener und exogener Variablen
- Darüber tiefergehende epistemologische Unterschiede

Drei Bereiche und vier Gleichungen

$$w = x - vk \qquad c = x - \left(g_K + \delta\right) k$$

$$1 + g_{Kt} = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \beta\left(1 + r_t\right)$$

Firmensektor

Entscheidungen über Produktion

- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor

Entscheidung über Sparen & Konsum

- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt

Entscheidung über Arbeit und Lohn

- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

$$w = \bar{w}$$

oder

$$\frac{K}{k(w)} = \bar{N}$$

oder

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + g_K = 1 + n$$

Klassische Wachstumsmodelle

- Das Kernelement aller klassischen Wachstumsmodelle ist die Interdependenz zwischen Klassen - in der Regel Kapital und Arbeit
- Hier lernen wir zwei Arten klassischer Wachstumsmodelle kennen:
  - Das klassische Conventional Wage (Share) Model
  - Das klassische Full Employment Model
- Sie stehen für unterschiedliche Stränge innerhalb der klassischen Wachstumstheorie und stellen Grundbausteine für komplexere Modelle dar
- Unterscheiden sich durch die Mengen endogener und exogener Variablen
  - Das CW(S)M ist dabei ein endogenes Wachstumsmodell
  - Beim FEM handelt es sich um ein exogenes Wachstumsmodell
- Werden für unterschiedliche Fragen und Kontexte verwendet → nicht notwendigerweise Substitute, aber unterschiedliche Mechanismen

Das Classical Conventional Wage Model

Erklärungsstruktur

$$w = \bar{w} \longrightarrow v = \frac{x - w}{k}$$

$$\downarrow$$

$$\delta + g_K = \beta v - (1 - \beta)(1 - \delta)$$

$$\downarrow$$

$$c = x - (g_K + \delta) k$$

Exogene Variablen:
$\bar{w}, x, k/\rho, \delta, \beta$

Endogene Variablen:
w, v, c, g_K

Das Classical Conventional Wage Model

Zusammenfassung der Modellgleichungen

- Insgesamt können wir das CWM durch die folgenden vier Gleichungen zusammenzufassen:

1. $w = x - vk$
2. $c = x - \left(g_K + \delta\right) k$
3. $\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$
4. $w = \bar{w}$

1. $w = x - \left(1 - \frac{v}{\rho}\right)$
2. $c = x\left(1 - \frac{g_K + \delta}{\rho}\right)$
3. $\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$
4. $w = \bar{w}$

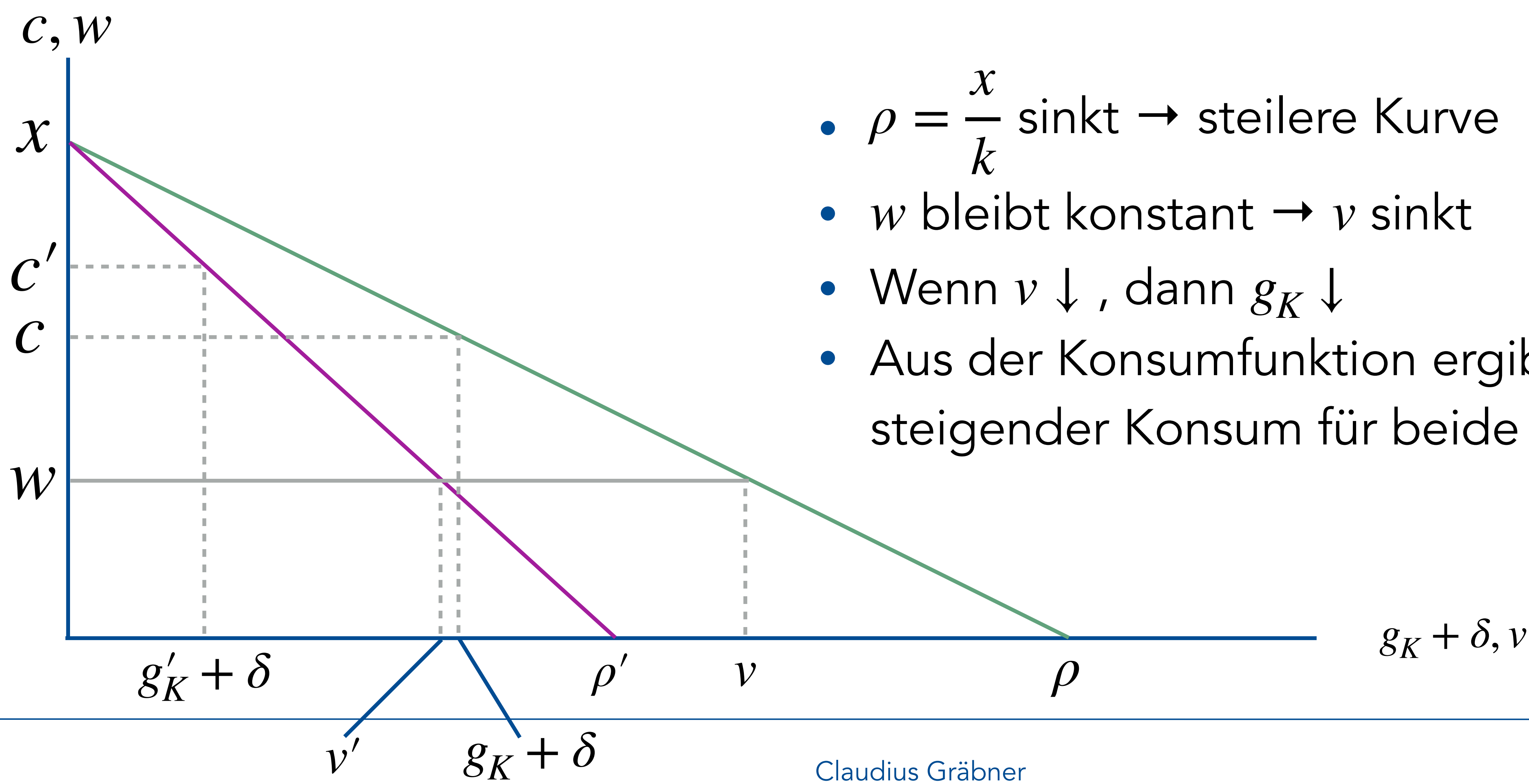
Exogene Variablen:
$\bar{w}, x, k/\rho, \delta, \beta$

Endogene Variablen:
w, v, c, g_K

Das Classical Conventional Wage Model

Anwendung: *comparative dynamics*

- Verwenden wir das Modell um die Variation in den endogenen Variablen als Reaktion auf die Variation der exogenen Variablen abzuleiten
- Beispiel: was ist die Implikation wachsender Kapitalintensität?
- Das können wir grafisch oder algebraisch lösen. Grafisch:



- $\rho = \frac{x}{k}$ sinkt → steilere Kurve
- w bleibt konstant → v sinkt
- Wenn $v \downarrow$, dann $g_K \downarrow$
- Aus der Konsumfunktion ergibt sich zudem steigender Konsum für beide Klassen

Das Classical Conventional Wage Model

Anwendung: *comparative dynamics*

- Verwenden wir das Modell um die Variation in den endogenen Variablen als Reaktion auf die Variation der exogenen Variablen abzuleiten
- Beispiel: was ist die Implikation wachsender Kapitalintensität?
- Das können wir grafisch oder algebraisch lösen. Algebraisch:

$$w = \bar{w}$$

Keine Änderung in w

$$v = \frac{x - w}{k}$$

Profitrate sinkt

$$\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$$

Wachstum sinkt

$$c = c^c + c^w = c^c + w$$

Konsum steigt

Das Classical Conventional Wage Model

Anwendung: *comparative dynamics*

- Warum steigt der Konsum genau?
  - $c^c = (1-\beta)(1+r)k$
  - $c^c = (1-\beta)(1+v-\delta)k$
  - $c^c = (1-\beta)(k+vk-\delta k) = (1-\beta)(k-\delta k+vk)$
  - $c^c = (1-\beta)((1-\delta)k+vk)$
  - Da $vk = x - w$ und β konstant sind, muss c^c steigen
- Implikationen können auch anhand empirischer Daten untersucht werden
  - Variation in endogenen Variablen in der Empirie über Modellmechanismen erklären
  - Ableitung von nicht beobachtbaren Parametern wie β
  - Es ist an diesen Stellen wo es zum Dissens zwischen Modellen kommt
- Auf diese Art und Weise können wir auch die Plausibilität von Modellen untersuchen (sozusagen 'process validation light')

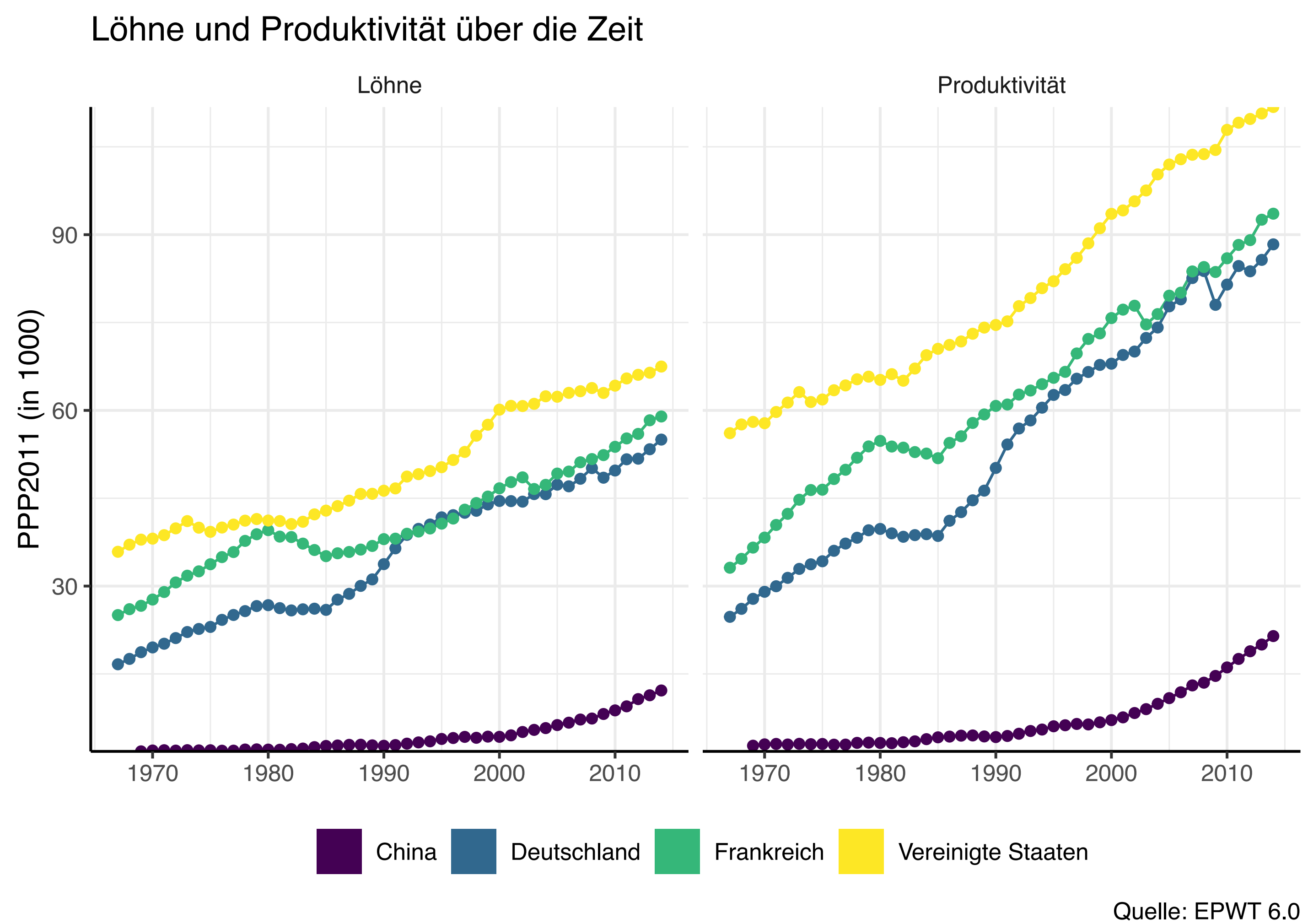
Wiederholungs- und weiterführende Aufgaben

- Was ist das zentrale Element in klassischen Wachstumsmodellen?
- Was sind die endogenen und was die exogenen Variablen im CWM?
- Fasst die Erklärungsstruktur des CWM kurz zusammen.
- Wieso sprechen wir beim CWM von einem endogenen Wachstumsmodell?
- Ladet euch die EPWT aus Moodle herunter und berechnet für das Jahr 2014 den empirisch umbeobachtbaren Wert β für Deutschland und die USA.
- Betrachtet die Verlauf von Löhnen und Arbeitsproduktivität über die letzten 50 Jahre. Welchen Trend erkennt ihr? Was impliziert das für das CWM?

Das Classical Conventional Wage Share Model

Motivation

- Über die letzten Jahre ist ein klarer Auswärtstrend für Löhne und Arbeitsproduktivität zu erkennen
- Das **passt nicht** zu der aktuellen Struktur des CWM:
    - Sowohl x als auch w sind als exogene Variablen bislang konstant



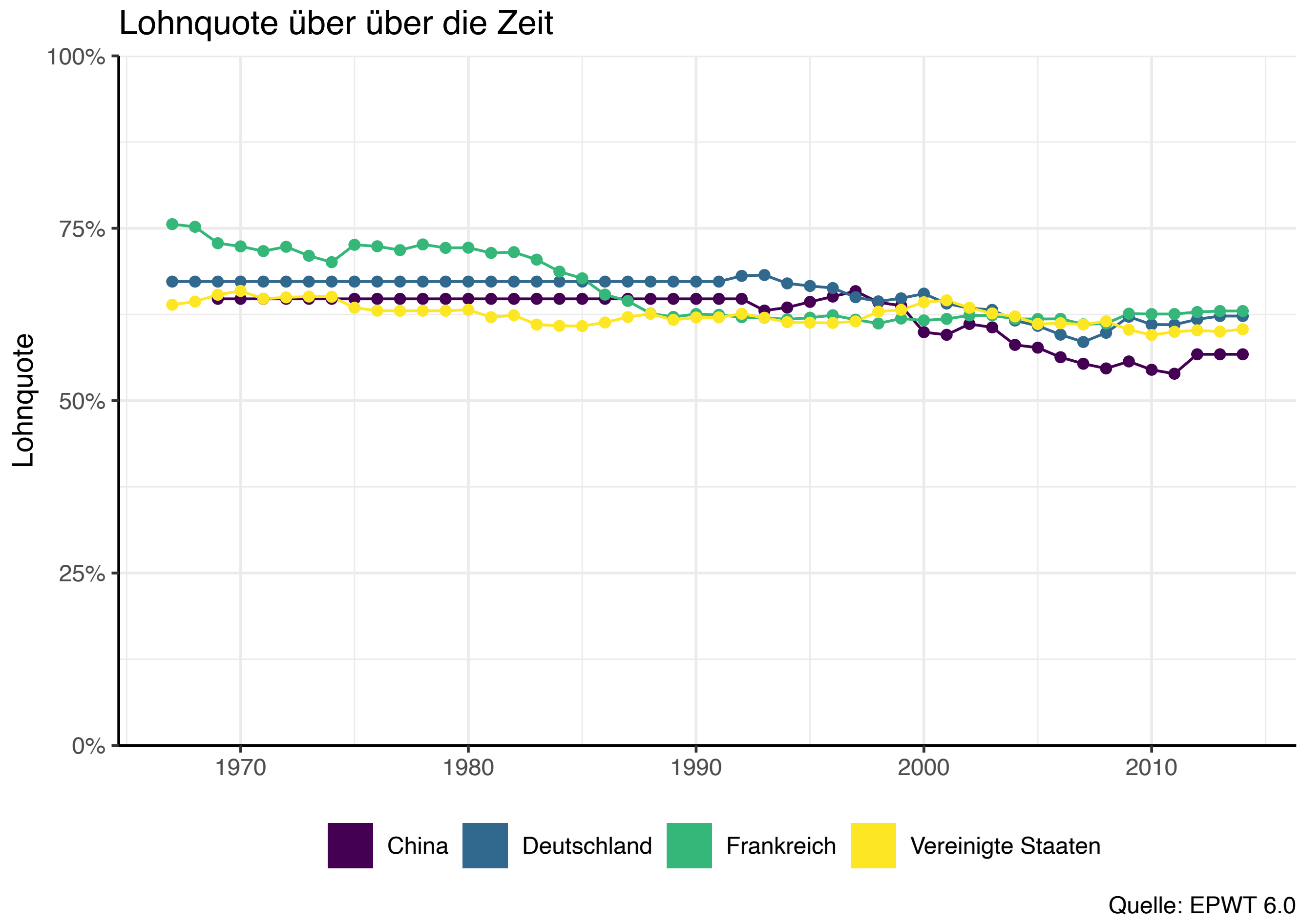
- Wir könnten diese exogenen Variablen entsprechend der Empirie steigen lassen
    - Annahme arbeits-sparendem technologischen Wandel → $w/x \rightarrow 0$
    - Wie sieht die Lohnquote in der Empirie aus?

Das Classical Conventional Wage Share Model

Motivation

- Die Lohnquote erscheint über die Zeit deutlich stabiler zu sein
- Zumindest in den USA und den meisten westlichen Ländern
    - Offene Frage: Trendwende seit den späten 80ern

→ Annahme exogener konstanten Lohnquote anstatt exogenen Lohns



- Die entsprechenden Umformungen machen aus dem CWM das CWSM - das klassische Conventional Wage Share Model

Das Classical Conventional Wage Share Model

Kerngleichungen

- Gemäß unserer vorherigen Beobachtung nehmen wir konstantes Wachstum der Arbeitsproduktivität um den Faktor γ an:

$$x_t = \left(1+\gamma\right) x_{t-1} \rightarrow x_t = x_0 \left(1+\gamma\right)^t$$

- Das hat Implikationen für die Kapitelintensität k:

$$k_t = \frac{x_t}{\rho} = \frac{x_0}{\rho} \left(1+\gamma\right)^t = k_0 \left(1+\gamma\right)^t$$

- Auch die Kapitalintensität ist dynamisch und ändert sich um Faktor γ
- Ab jetzt ist nun nicht mehr der conventional wage $\bar{w}$ gegeben, sondern der conventional wage share $1-\bar{\pi}$ (und damit auch die Profitquote $\bar{\pi}$)
- Daraus ergibt sich dann der Lohn w_t:

$$w_t = (1-\bar{\pi})\, x_t$$

Das Classical Conventional Wage Share Model

Kerngleichungen

- Daraus ergibt sich dann der Lohn w_t:

$$w_t = (1 - \bar{\pi})\, x_t$$

- Wenn wir dort die Formel für x_t einsetzen:

$$w_t = (1 - \bar{\pi})\, x_t = (1 - \bar{\pi})\, x_0 \left(1 + \gamma\right)^t \rightarrow w_t = w_0 \left(1 + \gamma\right)^t$$

- Wir sehen hier, dass der Lohn nun konstant um den Faktor γ wächst
- Um die Lohn-Profit-Plan zu bekommen erinnern wir uns, dass $x_t - vk_t = w_t$:

$$w_t = x_t - vk_t = x_0 \left(1 + \gamma\right)^t - vk_0 \left(1 + \gamma\right)^t$$

- Das schöne ist, dass wir das neue Modell formal fast komplett auf das CWM zurückführen können indem wir die Gleichung durch $\left(1 + \gamma\right)^t$ teilen:

$$w_0 \frac{\left(1 + \gamma\right)^t}{\left(1 + \gamma\right)^t} = x_0 \frac{\left(1 + \gamma\right)^t}{\left(1 + \gamma\right)^t} - vk_0 \frac{\left(1 + \gamma\right)^t}{\left(1 + \gamma\right)^t} \rightarrow w_0 = x_0 - vk_0$$

Das Classical Conventional Wage Share Model

Vergleich mit dem Conventional Wage Model - Algebra

- Die Gleichung $w_0 = x_0 - vk_0$ findet sich so quasi genauso im CWM (nur ohne Zeit-Indices) → Transformation der Variablem im CWM:

$$\tilde{x} = \frac{x}{(1+\gamma)^t}, \tilde{k} = \frac{k}{(1+\gamma)^t}, \tilde{w} = \frac{w}{(1+\gamma)^t}, \tilde{c} = \frac{c}{(1+\gamma)^t}$$

  - Diese neuen Variablen sind dann ebenfalls konstant über die Zeit hinweg

1. $w = x - vk$	1. $\tilde{w} = \tilde{x} - v\tilde{k}$
2. $c = x - (g_K + \delta)\, k$	2. $\tilde{c} = \tilde{x} - (g_K + \delta)\, \tilde{k}$
3. $\delta + g_K = \beta v - (1-\beta)(1-\delta)$	3. $\delta + g_K = \beta v - (1-\beta)(1-\delta)$
4. $w = \bar{w}$	4. $\tilde{w} = (1-\bar{\pi})\tilde{x}$

- Technisch gesehen brauchen wir also nichts neues lernen
  - Zudem: wenn $\gamma = 0$ sind die Modelle äquivalent!
  - Lediglich die Interpretation der Variablen und Gleichungen ändert sich leicht

Das Classical Conventional Wage Share Model
Vergleich mit dem Conventional Wage Model - Interpretation

- Die notwendigen Re-Interpretationen werden durch das Konzept der effektiven Arbeiter:innen enorm erleichtert
  - Während x den Output pro Arbeiter:in angibt, gibt $\tilde{x}$ den Output pro effektiver Arbeiter:in an → eine Arbeiter:in in t ist das produktive Äquivalent von $(1+\gamma)^t$ Arbeiter:innen in t Zeitschritten

    → Das CWM impliziert konstanten Output pro Arbeiter:in

    → Das CWSM impliziert konstanten Output pro effektiver Arbeiter:in
- Letzteres korrespondiert zu mit Faktor γ wachsendem Output pro Arbeiter:in
- Entsprechend muss auch Konsum und Lohn re-interpretiert werden
- Dieser Pattern übrigens keine schlechte Beschreibung dessen was wir empirisch gerade in westlichen Ländern beobachten können

Das Classical Conventional Wage Share Model
Vergleich mit dem Conventional Wage Model - Interpretation

- Eine alternative Darstellungsform fokussiert auf die beiden zentralen Trade-Offs im CW(S)M:
  - Konsum vs. Investment und Profite vs. Lohn
  - Profitquote $\pi = 1 - (w/x)$ als Maß für Verteilung zwischen Profiten und Lohn
  - Sparquote $s = 1 - (c/x)$ als Maß für Verteilung zwischen Sparen und Konsum

1. $\tilde{w} = \tilde{x} - v\tilde{k}$
2. $\tilde{c} = \tilde{x} - \left(g_K + \delta\right)\tilde{k}$
3. $\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$
4. $\tilde{w} = (1 - \bar{\pi})\tilde{w}$

$\Rightarrow$

1. $v = \pi\rho$
2. $g_K + \delta = s\rho$
3. $\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$
4. $\pi = \bar{\pi}$

- Übrigens: bisherige Betrachtung mit nur einer Produktionstechnik
  - Das korrespondiert zu einer Leontief-Produktionsfunktion → äquivalente Implikationen für den Fall dass profitmaximierende Entrepreneure Produktionstechniken wählen

Wiederholungsfragen

- Mit welchem empirischen Problem des CWM können wir das CWSM motivieren?
- Welche Annahme liegt stattdessen dem CWSM zugrunde?
- Was verstehen wir unter einer effektiven Arbeiter:in?
- Worin liegen strukturelle und interpretatorische Unterschiede zwischen dem CWM und dem CWSM?
- Für welche Parameterkonstellation sind CWM und CWSM komplett äquivalent?
- Gegeben die vorherige Frage, welches Modell ist wissenschaftstheoretisch attraktiver?
- Warum handelt es sich sowohl beim CWM als auch dem CWSM um ein endogenes Wachstumsmodell?

Das klassische Full Employment Modell

- Das CWSM wurde über den Arbeitsmarkt mit der Annahme des üblichen Lohns ($w = \bar{w}$) bzw. der üblichen Lohnquote ($\tilde{w} = (1 - \bar{\pi})\,\tilde{x}$ oder $\pi = \bar{\pi}$) geschlossen
- Alternativ kann ein Wachstum über die Annahme eines geräumten Arbeitsmarktes ('full employment assumption') geschlossen werden
- Gleichzeitig gibt es zahlreiche Ähnlichkeiten zum CWSM:
  - Aufgrund von arbeits-sparendem technischen Wandel wachsen k und x mit Rate γ
  - Die Variablen mit Basis der effektiven Arbeiter:innen sind $\tilde{k}$ und $\tilde{x}$ und bleiben konstant
  - Die Theorien der Produktion und für das Investment (und damit die ersten drei Modellgleichungen) bleiben genau gleich
- Hinzu kommt die Annahme konstanten Bevölkerungswachstums
- Zudem: vierte Modellgleichung wegen anderer Arbeitsmarkttheorie anders

Das klassische Full Employment Modell

Alternative Theorie für den Arbeitsmarkt

- Vorher: Annahme eines herkömmlichen Lohnes
- Jetzt: Arbeitsangebot wächst mit gegebener Rate und der Lohn passt sich so an, dass der Arbeitsmarkt geräumt wird
  - $N_t^S = N_0(1+n)^t$
- Ohne die Möglichkeit der profitmaximierenden Technologiewahl besteht die Möglichkeit eines Mismatches $N_t^S \neq N_t^D$
  - Zu wenig Kapitel → Arbeitslosigkeit → sinkender Lohn
  - Zu viel Kapitel → Unterauslastung → steigender Lohn
- Im Gleichgewicht gilt dann aber:
  - $\frac{K_t}{k_t} = N_t^S$ → ausreichend Jobs für Vollbeschäftigung
  - Erinnerung: $\frac{K}{k} = \frac{K}{K/N} = N$

Das klassische Full Employment Modell

Alternative Theorie für den Arbeitsmarkt

- Im Gleichgewicht gilt dann aber: $K_t / k_t = N_t^S$
- Damit das in der nächsten Periode auch noch so ist, muss der Kapitelstock mit dem Arbeitsangebot 'mitwachsen':

$$N_{t+1}^S = (1+n)\, N_t^S$$

$$N_{t+1}^S = (1+n)\frac{K_t}{k_t} = \frac{K_{t+1}}{k_{t+1}}$$

$$N_{t+1}^S = (1+n)\frac{K_t}{k_t} = \frac{K_{t+1}}{k_{t+1}} = \frac{(1+g_K)\,K_t}{(1+\gamma)\,k_t}$$

Natürliche Wachstumsrate

Das impliziert: $(1+n) = \dfrac{(1+g_K)}{(1+\gamma)} \rightarrow$ $1 + g_K = (1+n)\left(1+\gamma\right) \approx 1 + n + \gamma$

- Natürliche Wachstumsrate als Zielgröße für das Kapitalwachstum wenn es Vollbeschäftigung geben soll → vierte Modellgleichung

Das klassische Full Employment Modell

Modellgleichungen und Abgrenzung vom CWSM

- Insgesamt haben wir damit das folgende Gleichungssystem:

1. $\tilde{w} = \tilde{x} - v\tilde{k}$
2. $\tilde{c} = \tilde{x} - \left(g_K + \delta\right)\tilde{k}$
3. $\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$
4. $1 + g_K = (1 + n)\left(1 + \gamma\right)$

Exogene Variablen: $\tilde{k}, \tilde{x}, \delta, \beta, n, \gamma$

Endogene Variablen: $\tilde{w}, v, \tilde{c}, g_K$

1. $\tilde{w} = \tilde{x} - v\tilde{k}$
2. $\tilde{c} = \tilde{x} - \left(g_K + \delta\right)\tilde{k}$
3. $\delta + g_K = \beta v - \left(1 - \beta\right)(1 - \delta)$
4. $\tilde{w} = (1 - \bar{\pi})\,\tilde{w}$

Exogene Variablen: $\tilde{k}, \tilde{x}, \delta, \beta, \bar{\pi}$

Endogene Variablen: $\tilde{w}, v, \tilde{c}, g_K$

- Damit ist Wirtschaftswachstum nicht mehr endogen, sondern wird durch das (exogen gegebene) Bevölkerungswachstum bestimmt
  - Anders als im CV(S)M hat eine größere Sparneigung der Kapitalist:innen keinen Effekt auf Wachstum → würden durch Änderungen in den Löhnen ausgeglichen

Das klassische Full Employment Modell

Mechanismus zur Räumung des Arbeitsmarktes

- Auf den ersten Blick wirkt das FEM fast neoklassisch
  - Der Mechanismus, der für Vollbeschäftigung sorgt, ist jedoch ganz anders
  - Situationen des Nicht-Gleichgewichts sind im FEM instabil:

Zu niedriger Lohn ⇒ Hohe Profite ⇒ $g_K > n$ ⇒ Überauslastung & steigender Lohn

Zu hoher Lohn ⇒ Niedrige Profite ⇒ $g_K < n$ ⇒ Arbeitslosigkeit & sinkender Lohn

- Im neoklassischen Kontext ist der Mechanismus anders:

Zu niedriger Lohn ⇒ Arbeitsintensivere Produktion ⇒ Verstärkte Arbeitsnachfrage ⇒ Steigende Löhne

Zu hoher Lohn ⇒ Kapitalintensivere Produktion ⇒ Geringere Arbeitsnachfrage ⇒ Sinkende Löhne

Das klassische Full Employment Modell
Ausblick

- Wie im Falle des CW(S)M funktioniert das Modell äquivalent für den Fall von unendlich vielen Produktionstechniken und einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion
- Empirisch problematisch am FEM (und am CWSM) ist, dass Wachstums- und Profitraten über die Zeit hinweg konstant bleiben
  - In echten Ökonomien nehmen diese Raten tendenziell ab
- Um diese Regularität auch im Modell abzubilden, können wir aber die Modellierung des technologischen Wandels anpassen
  - Details siehe Kapitel 7 in Foley et al. (2019)
- Typisches Prinzip in der Arbeit mit Wachstumsmodellen: man findet eine Regularität, die dem Modell widerspricht oder exogen bleibt und man ergänzt endogene und exogene Variablen um dieses Phänomen zu erklären

Wiederholungsfragen

- Welche Variablen sind im FEM endogen, welche exogen? Wo liegen hier die Unterschiede zum CW(S)M?
- Welcher Faktor bestimmt im FEM letztendlich die Wachstumsrate der Ökonomie?
- Warum sprechen wir hier von einem exogenen Wachstumsmodell?
- Inwiefern unterscheidet sich der Mechanismus, welcher der Räumung des Arbeitsmarktes im klassischen FEM zugrundeliegt von dem, der den neoklassischen FEM zugrundeliegt?
- Mit welcher empirischen Beobachtung können wir die weitere Endogenisierung von technologischem Wandel motivieren?

ifso institute for socio-economics
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN Open-Minded

Klassische Wachstumsmodelle - Zusammenfassung

- In klassischen Wachstumsmodellen ist das Zusammenspiel ökonomischer Klassen - ins. Kapital und Arbeit - zentral
- Wir haben zwei zentrale Modelle kennengelernt
  - Das CW(S)M als endogenes Wachstumsmodell
  - Das FEM als exogenes Wachstumsmodell
- Beide Modelle sind empirisch gesehen gute Ausgangsmodelle
- Viele wichtige Aspekte bleiben aber exogen → unattraktiv
- Je nach Erkenntnisinteresse können sie aber leicht um weitere Gleichungen erweitert werden um zusätzliche Variablen zu endogenisieren
  - Siehe Beispiel des technologischen Wandels
- Klassische Wachstumsmodelle sind heute weiterhin beliebt, aber nicht ansatzweise so verbreitet wie ihre neoklassischen Pendants

Wiederholungsfragen

- Fasst die Erklärungsstruktur des CW(S)M und des FEM kurz zusammen. Wo liegen die zentralen Unterschiede?
- Warum sprechen wir beim CW(S)M von einem endogenen und beim FEM von einem exogenen Wachstumsmodell?
- Mit welchem empirischen Problem des CWM können wir das CWSM motivieren?
- Für welche Parameterkonstellation sind CWM und CWSM äquivalent?
- Welcher Faktor bestimmt im FEM am Ende die Wachstumsrate der Ökonomie?
- Inwiefern unterscheidet sich der Mechanismus, welcher der Räumung des Arbeitsmarktes im klassischen FEM zugrundeliegt von dem, der den neoklassischen FEM zugrundeliegt?